УДК 519.1

Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ[1]

Аннотация. Рассматриваются четыре комбинаторные задачи, параметризованные кратностью r элемента базового мультимножества: распределение индексов vp-монотонных перестановок, обобщенные перестановки Гесселя – Стенли и обобщенные частично упорядоченные множества Баклавского – Эдельмана, обобщенные числа Стирлинга и обобщенные частично упорядоченные множества разбиений, обобщенные статистики и обобщенные многочлены Эйлера. Для исследования этих задач привлекаются различные методы.

Ключевые слова: мультимножество, статистика, производящая функция, vp-монотонные перестановки, перестановки Гесселя – Стенли, посеты Баклавского – Эдельмана, числа Стирлинга, посеты разбиений, многочлены Эйлера.

Abstract. Four combinatorial problems parametrized by multiplicity r of an element of base multiset are considered: distribution of indexes vp-monotonous permutations, the generalized Gessel – Stanley permutations and the generalized Baclawski – Edelman partially ordered sets, the generalized Stirling numbers and the generalized partially ordered sets of the partitions, the generalized statistics and generalized Eulerian polynomials. For research of these problems various methods are involved.

Keywords: multiset, statistic, generating function, vp-monotonous permutations, Gessel – Stanley permutations, Baclawski – Edelman posets, Stirling numbers, posets partitions, Eulerian polynomials.

Введение

Разнообразие комбинаторных задач заставляет унифицировать методы их описания и исследования. Прогресс в этой области хорошо прослеживается по монографиям [1, 2], в которых анализируется большое число перечислительных задач. Одним из простейших подходов к унификации является исследование семейств комбинаторных задач, зависящих от некоторого параметра. В качестве такого параметра будем рассматривать кратность $r \geq 1$ каждого элемента мультимножества $\{1^r, 2^r, \ldots, n^r\}$, которое служит базой для постановки ряда комбинаторных задач. Это мультимножество для краткости будем обозначать $[n^r]$, где n является целым положительным числом.

Все перестановки множества $[n^r]$ образуют множество $SP_{n,r}$ мощности $\#\{\sigma : \sigma \in SP_{n,r}\} = (r!)^{-n}(rn)!$. Каждую перестановку $\sigma \in SP_{n,r}$ удобно рассматривать как слово $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_{rn}$ длины $|\sigma| = rn$, причем $SP_{n,r}$ содержит и зеркальный образ (mirror image) $\mathrm{mi}(\sigma) \in SP_{n,r}$ слова σ, т.е. σ, записанное в обратном порядке. Например, в тождественной перестановке $\varepsilon \in SP_{n,r}$, трактуемой как слово $\varepsilon = 1^r \ldots n^r$, запись i^r, $i \in [n]$, означает степень символа i, полученную конкатенацией r символов i, а $\mathrm{mi}(\varepsilon) = n^r \ldots 1^r$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект № 09-06-28615 а/В).

На подмножествах перестановок из $SP_{n,r}$ в комбинаторном анализе часто определяют числовые функции и рассматривают их распределения относительно равномерной меры на этих подмножествах. Такие функции в работах [2, 3] называются статистиками.

При рассмотрении упорядоченных множеств вместо словосочетания «локально конечное частично упорядоченное множество» будем использовать, как и в работе [4], термин «посет», соответствующий английскому сокращению «poset» (partial ordered set).

1. Распределение индексов vp-монотонных перестановок

В криптографии из перестановки $\sigma \in SP_{n,r}$ с помощью фиксированного ключа $\kappa \in SP_{n,r}$ образуют новое слово $\tau = \tau_1 \ldots \tau_{rn}$, $\tau \in T_{n,r}$, $|\tau| = rn$, над алфавитом $[n]$ следующим образом: $\tau = \sigma \oplus \kappa$, где $\tau_i = \sigma_i + \kappa_i \ (\mathrm{mod}\, n)$, $i = 1, \ldots rn$, а τ_i является наименьшим положительным вычетом.

Это преобразование, определяющее биекцию $SP_{n,r}$ на множество слов $T_{n,r}$, назовем vp-отображением, т.е. $\mathrm{vp}: \sigma \mapsto \tau$ (vp – сокращение словосочетания «vector permutation»). Так как нетривиальные перестановки рассматриваются при $n \geq 2$, то в качестве ключа будем фиксировать перестановку ε или $\mathrm{mi}(\varepsilon)$.

Определение 1. Назовем слово $\tau \in T_{n,r}$ монотонным, если все его последовательные символы образуют неубывающую (невозрастающую) последовательность, а соответствующую перестановку $\sigma = \mathrm{vp}^{-1}(\tau)$, $\sigma \in SP_{n,r}$, назовем vp-монотонной перестановкой.

Соответствие между словами $\tau = \sigma \oplus \varepsilon$ и $\mathrm{mi}(\tau) = \mathrm{mi}(\sigma) \oplus \mathrm{mi}(\varepsilon)$ позволяет ограничиться рассмотрением только множества $\mathrm{mon}(SP_{n,r})$ vp-монотонно неубывающих перестановок, причем в отображении $\mathrm{vp}: \mathrm{mon}(SP_{n,r}) \to$ $\to \mathrm{mon}(T_{n,r})$ используется ключ $\kappa = \mathrm{mi}(\varepsilon)$.

Определение 2. Статистику $\mathrm{ivp}(\sigma) = (nr)^{-1} \sum_{i=1}^{rn} \tau_i$, где $\sigma \in \mathrm{mon}(SP_{n,r})$, а $\tau = \mathrm{vp}(\sigma)$, назовем индексом vp-монотонно неубывающей перестановки.

Эта статистика при $r = 1$ была введена в работе [3]. Она находит среднее значение символа в слове $\tau = \mathrm{vp}(\sigma)$ и, несмотря на нерегулярность vp-отображения на множестве $\mathrm{mon}(SP_{n,r})$, обладает рядом закономерностей.

Лемма 1. а) *Индексы* $\mathrm{ivp}(\sigma)$ *перестановок* $\sigma \in \mathrm{mon}(SP_{n,r})$ *принимают только целые значения* $k = 1, \ldots, n$.

б) *Если* $\sigma \in \mathrm{mon}(SP_{n,r})$ *и* $\mathrm{ivp}(\sigma) = k$, *то в слове* $\sigma = \xi n^r \eta$ *префикс* ξ *и суффикс* η *длины* $|\eta| = r(k-1)$ *являются любыми монотонно неубывающими словами такими, что все эти* σ *могут быть лексикографически упорядочены следующим образом:* $1^r \ldots (n-k)^r \, n^r \, (n-k+1)^r \ldots (n-1)^r$, …, $k^r \ldots n^r \, 1^r \ldots (k-1)^r$.

То есть

Доказательство. С помощью равенства $\tau = \sigma \oplus \kappa$, $\kappa = \mathrm{mi}(\varepsilon)$, для перестановок $\sigma = k^r \ldots n^r 1^r \ldots (k-1)^r$ находим $\tau = k^{rn}$, поэтому $\mathrm{ivp}(\sigma)$ принимает значения $k = 1,\ldots,n$. Пусть $\sigma \in \mathrm{mon}(SP_{n,r})$, а в слове $\overline{\tau} = \overline{\tau}_1 \ldots \overline{\tau}_{nr}$ символы $\overline{\tau}_i = 1$ при $\sigma_i + \kappa_i > n$ и $\overline{\tau}_i = 0$ при $\sigma_i + \kappa_i \le n$. Тогда статистика $\mathrm{civp}(\sigma) = r^{-1}\sum_{i=1}^{rn} \overline{\tau}_i$ дополнительна к статистике $\mathrm{ivp}(\sigma)$, т.е. справедливо равенство $\mathrm{ivp}(\sigma) + \mathrm{civp}(\sigma) = n+1$. Так как слово $\overline{\tau} = 1^{r(n-k+1)}0^{r(k-1)}$ для всех перестановок, описанных в лемме 1,б), и эта форма слова $\overline{\tau}$ сохраняется для любой $\sigma \in \mathrm{mon}(SP_{n,r})$, то лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть* $V_{n,r,k} = \#\{\sigma : \sigma \in \mathrm{mon}(SP_{n,r}), \mathrm{ivp}(\sigma) = k\}$, $k \in [n]$. *Тогда имеет место следующее рекуррентное соотношение:*

$$V_{0,r,k} = 0,\ V_{1,r,k} = \delta_{1k},$$

$$V_{n,r,k} = V_{n-1,r,k} + V_{n-1,r,k-1} + (r-1)V_{n-2,r,k-1},\ n \ge 2,\ k \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

где δ_{ij} *– символ Кронекера* ($\delta_{ij} = 1$ *при* $i = j$ *и* $\delta_{ij} = 0$ *при* $i \ne j$).

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $r \ge 1$ равенства $V_{0,r,k} = 0$, $V_{1,r,k} = \delta_{1k}$ находятся непосредственно. Если для некоторого $n \ge 2$ соотношение (1) выполнено, то оно выполняется и при $n+1$. Действительно, с помощью леммы 1 все слова $\sigma \in \mathrm{mon}(SP_{n+1,r})$, $\mathrm{ivp}(\sigma) = k$, можно разбить на следующие блоки: 1) получается вставкой слова $(n+1)^r$ перед суффиксом длины $r(k-1)$ в каждое слово $\pi \in \mathrm{mon}(SP_{n,r})$, $\mathrm{ivp}(\pi) = k$; 2) получается вставкой $(n+1)^r$ перед суффиксом длины $r(k-1)$ в каждое $\pi \in \mathrm{mon}(SP_{n,r})$, $\mathrm{ivp}(\pi) = k-1$ и перемещением подслова n^r в конец слова; 3) получается вставкой $(n+1)^r$ перед суффиксом длины $r(k-2)$ в каждое $\pi \in \mathrm{mon}(SP_{n-1,r})$, $\mathrm{ivp}(\pi) = k-1$, вставкой n^r в конец слова и обменом $i = 1,\ldots,r-1$ символом между подсловами $(n-1)^r$, n^r так, чтобы выполнялись условия леммы 1.

Для производящих многочленов $V_{n,r}(t) = \sum_{k=1}^{n} V_{n,r,k}\,t^k$ соотношение (1) позволяет легко найти рекуррентную формулу:

$$V_{0,r}(t) = 0,\ V_{1,r}(t) = t,\ V_{n,r}(t) = (1+t)V_{n-1,r}(t) + (r-1)tV_{n-2,r}(t),\ n \ge 2, \tag{2}$$

которая влечет равенство $V_{n,r}(t) = t^{n+1}V_{n,r}(t^{-1})$, показывающее, что $t^{-1}V_{n,r}(t)$ – возвратный многочлен, иначе $V_{n,r,k} = V_{n,r,n-k+1}$.

Производящая функция $V_r(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{n,r}(t)\,z^n$ определяется стандартным образом с помощью выражения (2) и оказывается рациональной

$$V_r(t,z)=\frac{tz}{1-(1+t)z-(r-1)tz^2}, \qquad (3)$$

а с помощью разностного уравнения (2) или функции (3) несложно найти явное выражение для многочленов $V_{n,r}(t)$:

$$V_{n,r}(t)=\frac{t}{\sqrt{(1-t)^2+4rt}}\left(\left(\frac{1+t+\sqrt{(1-t)^2+4rt}}{2}\right)^n-\left(\frac{1+t-\sqrt{(1-t)^2+4rt}}{2}\right)^n\right), \qquad (4)$$

что дает $V_{n,r}(1)=\left(2\sqrt{r}\right)^{-1}\left((1+\sqrt{r})^n-(1-\sqrt{r})^n\right)$ – число vp-монотонных перестановок. В частности, $V_{n,1}(1)=2^{n-1}$, а $V_{n,5}(1)=2^{n-1}F_n$, где F_n – числа Фибоначчи.

Разложение функции (3) по степеням *t* приводит к выражению

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{k!}V_{n,r,k+1}\frac{z^n}{n!}=\psi(z)\frac{[\varphi_r(z)]^k}{k!},\ k\ge 0,\text{где }\psi(z)=\frac{1}{1-z},\ \varphi_r(z)=\frac{z+(r-1)z^2}{1-z},$$

а $\psi(0)\ne 0,\ \varphi_r(0)=0,\ \varphi_r'(0)\ne 0$, т.е., по терминологии Л. М. Коганова [4], последовательность чисел $\{k!^{-1}n!V_{n,r,k+1}\}$ является псевдопорождаемой с порождающей функцией $\varphi_r(z)$ и образующей $\psi(z)$.

Псевдопорождаемые последовательности и производящие функции являются мощными инструментами решения ряда задач перечислительной комбинаторики [4, 5]. Таким образом, соотношения (2)–(4) дают исчерпывающее описание многочленов $V_{n,r}(t)$ и их коэффициентов $V_{n,r,k}$, определяющих распределение индексов vp-монотонных перестановок.

Следующее утверждение позволяет использовать вероятностные методы работы [3] для получения асимптотики чисел $V_{n,r,k}$ при $n\to\infty$.

Теорема 2. *Многочлены* $t^{-1}V_{n-1,r}(t)$ *и* $t^{-1}V_{n,r}(t)$ $(n\ge 2)$ *образуют положительную пару, иначе все их нули – различные отрицательные числа, взаимно разделяющие друг друга, т.е. между любыми двумя нулями многочлена* $t^{-1}V_{n,r}(t)$ *имеется один нуль многочлена* $t^{-1}V_{n-1,r}(t)$.

Доказательство. В промежутке $(-\infty,0]$ последовательность $\{t^{-1}V_{k,r}(t)\}_{k=1}^{n}$ образует ряд многочленов Штурма, что следует из соотношения (2). Разность числа перемен знаков в значениях многочленов этого ряда, вычисленных при $t=-\infty$ и $t=0$, равна $n-1$, что и доказывает теорему 2.

2. Обобщенные ГС-перестановки и обобщенные БЭ-посеты

При изучении полиномиальных последовательностей Стирлинга обоих родов И. Гесселем и Р. Стенли в [6] были определены специальные перестановки множества $[n^2]$, которые в [7] названы ГС-перестановками.

Определение 3. Обобщенной ГС-перестановкой будем называть слово $\sigma \in SP_{n,r}$, $r \geq 1$, обладающее ГС-свойством: все буквы слова σ, стоящие между любыми двумя вхождениями символа $i \in [n]$, не меньше этого i.

Под определение 3 при $r = 1$ подходят обычные перестановки, а при $r = 2$ – перестановки Гесселя – Стенли. Множество всех обобщенных ГС-перестановок $\sigma \in SP_{n,r}$ обозначим $GS_{n,r}$. В работе [8] рассмотрены некоторые свойства обобщенных эйлеровых статистик на множестве $GS_{n,r}$.

По определению 3 легко строится итерационный алгоритм генерации $GS_{n+1,r}$, основанный на нахождении $(rn+1)$-го слова из $GS_{n+1,r}$ путем вставки $(n+1)^r$ в выбранное слово $\pi \in GS_{n,r}$, а $\#\{\sigma : \sigma \in GS_{n+1,r}\} = 1 \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (rn+1)$.

Определение 4. Фиксируя $r \geq 1$ и $n \geq 1$, сформируем множество $\overline{P}_{n,r}$ всех подмножеств $\{i_1, i_2, \ldots, i_{rk}\} \subset \mathbf{Z}$ таких, что $0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{rk} < rn+1$, $k \in [n]$, а числа $i_1,\ i_2 - i_1, \ldots, i_{rk} - i_{rk-1}$ имеют вид $rj+1,\ j = 0,1,\ldots$ Упорядоченное по включению множество $\overline{P}_{n,r}$ будем называть обобщенным БЭ-посетом.

Под определение 4 при $r = 1$ подходит булева решетка B_n, а при $r = 2$ – посет К. Баклавского и П. Эдельмана, описанный в [2].

Диаграмма Хассе посета $\overline{P}_{n,r}$ строится на базе множества $[rn]$ – максимальный (единичный) элемент. На первом шаге все покрываемые им множества находятся по определению 4 вычеркиванием любых r рядом стоящих элементов $[rn]$, что можно выполнить $r(n-1)+1$ способом. Если на k-м шаге все вершины y диаграммы Хассе построены, то покрываемые ими вершины $x < y$ также находятся вычеркиванием из каждого множества y любых r рядом стоящих его элементов. Пустое множество $\varnothing$ служит минимальным (нулевым) элементом.

Таким образом, посет $\overline{P}_{n,r}$ имеет единственную ранговую функцию $\rho : \overline{P}_{n,r} \to [n]$, для которой $\rho(\varnothing) = 0,\ \rho([rn]) = n$. Так как все максимальные цепи посета $\overline{P}_{n,r}$ имеют одинаковую длину n, то множество $\overline{P}_{n,r}$ градуированное, а число максимальных цепей равно $(r(n-1)+1) \cdot \ldots \cdot (r+1) \cdot 1$.

Определим посет $P_{n,r}$, диаграмма Хассе которого строится так же, как и для посета $\overline{P}_{n,r}$, но ее вершинами являются слова, а не множества, причем слово $\varepsilon = 1^r \ldots n^r$ заменяет базовое множество $[rn] = \{1, 2, \ldots, rn\}$.

Лемма 2. *Посеты* $P_{n,r}$ *и* $\overline{P}_{n,r}$ *изоморфны.*

Доказательство. Построение диаграмм Хассе посетов $P_{n,r}$ и $\overline{P}_{n,r}$ показывает, что достаточно задать биекцию между словом $\varepsilon = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{rn}$ и множеством $[rn]=\{i_1,\ldots,i_{rn}\}$. Она определяется формулами $i_k=r(\varepsilon_k-1)+m$, $k=1,\ldots,rn$, где m – наименьший положительный вычет числа k по $\bmod r$. Отметим, что эта биекция позволяет преобразовать каждое слово $\sigma\in GS_{n,r}$ в слово $\overline{\sigma}\in\overline{GS}_{n,r}$.

По лемме 2 число максимальных цепей в посетах $P_{n,r}$ и $\overline{P}_{n,r}$ одинаково и совпадает с

$$\operatorname{card} GS_{n,r}=\operatorname{card}\overline{GS}_{n,r}=r^n\frac{\Gamma\left(n+r^{-1}\right)}{\Gamma\left(r^{-1}\right)},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Покажем, что существует алгоритм маркировки каждой максимальной цепи посетов $P_{n,r}$ и $\overline{P}_{n,r}$ соответствующими словами $\sigma\in GS_{n,r}$ и $\overline{\sigma}\in\overline{GS}_{n,r}$.

Переход от вершины $y\in\overline{P}_{n,r}$ ранга $(n-k)$ диаграммы Хассе к вершине $x\in\overline{P}_{n,r}$, $x<y$, ранга $n-k-1$, $k=0,\ldots,n-1$, состоит в вычеркивании r рядом стоящих элементов множества y. Считая, что вычеркнутые числа задают номера символов в слове $\sigma=\sigma_1,\ldots,\sigma_{rn}$, вставим на эти r мест символы $(n-k)$. Тогда при переходе от единицы $[rn]$ к нулю $\varnothing$ посета $\overline{P}_{n,r}$ найдем слово $\sigma\in GS_{n,r}$, которое легко преобразуется в слово $\overline{\sigma}\in\overline{GS}_{n,r}$. Так как этим методом находятся все перестановки $\sigma\in GS_{n,r}$, то построен второй алгоритм генерации $GS_{n,r}$.

В рангово-производящей функции $U_{n,r}(t)=\sum_{k=0}^{n}U_{n,r,k}\,t^k$ коэффициенты $U_{n,r,k}$ называются числами Уитни второго рода [2].

Теорема 3. *Для посетов $P_{n,r}$ и $\overline{P}_{n,r}$ числа Уитни второго рода*

$$U_{n,r,k}=\binom{n+(r-1)k}{rk}. \tag{5}$$

Доказательство. На шаге $k=0,1,\ldots,n$ вершины диаграммы Хассе посета $\overline{P}_{n,r}$ находятся вычеркиванием rk элементов из множества $[rn]$ так, чтобы в результате было не более k пробелов. Поэтому на k-м шаге имеем $\binom{r(n-k)+k}{r(n-k)}$ вершин, а замена k на $(n-k)$ окончательно дает выражение (5).

Для вычисления общего числа элементов посетов $P_{n,r}$ и $\overline{P}_{n,r}$ введем производящую функцию $U_r(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}U_{n,r}(t)\,z^n$, полагая $U_{0,r}(t)=1$.

Теорема 4. *Функция* $U_r(t,z)$ *рациональна и имеет вид*

$$U_r(t,z)=\frac{(1-z)^{r-1}}{(1-z)^r-tz}. \qquad (6)$$

Доказательство. Подставляя в $U_r(t,z)$ выражение (5), изменяя порядок суммирования и заменяя *n* на $n+k$, получим

$$U_r(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty}(tz)^k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+rk}{rk}z^n .$$

Затем, применяя тождество

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m}{m}z^n ,$$

окончательно приходим к формуле (6).

Обобщенные многочлены Фибоначчи $F_{n,r}(t)$ можно определить рекуррентным соотношением:

$$F_{0,r}(t)=\ldots=F_{r-2,r}(t)=0,\ \ F_{r-1,r}(t)=1,\ F_{n,r}(t)=tF_{n-1,r}(t)+F_{n-r,r}(t),\ n\ge r .$$

Их производящая функция $F_r(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n,r}(t)z^n$ легко вычисляется $F_r(t,z)=z^{r-1}(1-tz-z^r)^{-1}$, а разложение $F_r(1,z)=z^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(z^r(1-z)^{-1})^k$ показывает, что $F_{n-1,r}(1)$ равно числу композиций *n*, все части которых не меньше *r* [9].

Так как для производящей функции (6) справедливо равенство

$$U_r(t,z)=r^{-1}\sum_{k=1}^{r}(1-(e^{2\pi ik}tz)^{1/r}-z)^{-1},\ i=\sqrt{-1} ,$$

связывающее ее с функцией $(1-tz-z^r)^{-1}$, то $U_{n,r}(t)\ =F_{r(n+1)-1,r}(t^{1/r})$, а общее число элементов посетов $P_{n,r}$ и $\overline{P}_{n,r}$ равно $U_{n,r}(1)\ =F_{r(n+1)-1,r}(1)$.

Посет $\overline{P}_{n,r}$ однороден в смысле [2], и матрицы $(U_{n,r,k})_{n,k=0}^{m}$, $(u_{n,r,n-k})_{n,k=0}^{m}$ взаимно обратны ($u_{n,r,k}$ называется *k*-м числом Уитни первого рода).

Разложение функции (6) по степеням *t* приводит к псевдопорождаемой последовательности $\{k!^{-1}n!U_{n,r,k}\}$ с порождающей функцией $\varphi_r(z)=z(1-z)^{-r}$ и образующей $\psi(z)=(1-z)^{-1}$. Если $\Phi_r=\Phi_r(w)$, $\Phi_r(0)=0$ – решение уравнения $\Phi_r=w(1-\Phi_r)^r$, то паре $(\psi(z),\varphi_r(z))$ отвечает пара $([\psi(\Phi_r(w))]^{-1},\Phi_r(w))$, задающая псевдопорождаемую последовательность, обратную данной [4]. В частности, при $k=0$ получим последовательность $\{n!u_{n,r,n}\}$, позволяющую вычислить функцию Мебиуса $\mu_{n,r}=\mu(0,1)=u_{n,r,n}$ посета $\overline{P}_{n,r}$.

В рассматриваемом случае по теореме Лагранжа [5] находим

$$\Phi_r(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}(1-z)^{rn}}{dz^{n-1}}\right]\Bigg|_{z=0}, \text{ а } [\psi(\Phi_r(w))]^{-1}=1-\Phi_r(w),$$

что устанавливает связь функции $\mu_{n,r}$ с числами Фусса – Каталана $C_{n,r}$

$$\mu_{n,r}=(-1)^n C_{n,r},\ C_{n,r}=\frac{1}{(r-1)n+1}\binom{rn}{n},$$

комбинаторный смысл которых подробно рассматривается в [10]. Число плоских деревьев с висячим корнем и с $(r-1)n+1$ некорневыми вершинами, имеющими степень, сравнимую с 1 по $\mathrm{mod}(r-1)$, также равно $C_{n,r}$ [5].

3. Обобщенные числа Стирлинга и обобщенные посеты разбиений

Известно, что общие задачи размещения и занятости для случая одинаковых ячеек весьма сложны [1]. Поставим задачу о нахождении числа способов $S_{n,r,k}$ размещения n объектов с номерами $1,\ldots,n$ по k одинаковым ячейкам с упорядочением уровня r при условии, что ни одна из них не остается пустой.

При $r=0$ упорядочение отсутствует и $S_{n,0.k}=S_{n,k}$, где $S_{n,k}$ – числа Стирлинга второго рода; при $r=1$ объекты в ячейках упорядочены и $S_{n,1,k}=\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$ – числа Лаха без знака [1]. При упорядочении уровня $r\ge 1$ каждый объект, помещенный в ячейку, копируется r раз, а слова, составленные из номеров объектов каждой ячейки, обладают ГС-свойством.

Используя индукцию по n, приходим к рекуррентному соотношению

$$S_{0,r,k}=\delta_{0k},\ S_{n,r,k}=(r(n-1)+k)S_{n-1,r,k}+S_{n-1,r,k-1},\ n\ge 1,\ k\in\mathbf{Z}, \quad (7)$$

поэтому будем называть $S_{n,r,k}$ обобщенными числами Стирлинга второго рода.

Каждому рассмотренному размещению при $r=0$ отвечает обычное разбиение множества $[n]$, а при $r\ge 1$ разбиение множества $[n^r]$ на упорядоченные блоки, обладающие ГС-свойством, причем $S_{n,r,1}=\#\{\sigma:\sigma\in GS_{n,r}\}$.

Определение 5. Пусть $\Pi_{n,r}$ – множество всех разбиений $[n^r]$ типа, определенного значением $r\ge 0$. Обобщенным посетом разбиений $\Pi_{n,r}$ назовем частично упорядоченное по измельчению множество $\Pi_{n,r}$, для которого $\pi\le\sigma$, если каждый упорядоченный блок π содержится в упорядоченном блоке σ.

Например, по этому определению в посете $\Pi_{3,2}$ упорядоченное разбиение $\{122331\}$ покрывает три разбиения $\{11\},\{2233\}$; $\{22\},\{1331\}$; $\{33\}$, $\{1221\}$.

Из определения 5 следует, что посет $\Pi_{n,r}$ – градуированное множество ранга ($n-1$), а $\rho(\pi)=n-|\pi|$, где $|\pi|$ – число блоков разбиения π, причем при $r\ge 1$ этот посет не содержит единицы. С помощью (7) несложно проверить, что многочлен $S_{n,r}(t)=\sum_{k=1}^{n} S_{n,r,k}\,t^k$, связанный с рангово-производящей функцией посета $\Pi_{n,r}$ формулой $t^n S_{n,r}(t^{-1})$, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_{0,r}(t)=1,\ S_{n,r}(t)=(r(n-1)+t)S_{n-1,r}(t)+tS'_{n-1,r}(t),\ n\ge 1, \qquad (8)$$

т.е. $S_{n,r,n-k}$ – k-е число Уитни второго рода посета $\Pi_{n,r}$.

Теорема 5. *Для многочленов* $S_{n,r}(t)$ *справедлива формула*

$$S_{n,r}(t)=e^{-t}(t^{-rn}H_r^n)e^t,\ H_r=t^{r+1}\frac{d}{dt}, \qquad (9)$$

а производящая функция $S_r(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty} S_{n,r}(t)\,n!^{-1}z^n$ *имеет вид*

$$S_0(t,z)=\exp(t(e^z-1)),\ \ S_r(t,z)=\exp(t((1-rz)^{-1/r}-1)) \text{ при } r\ge 1, \qquad (10)$$

где используется главное значение функции $(1-rz)^{-1/r}$.

Доказательство. Формула $S_{n,r}(t)=t^{-rn}e^{-t}(t^{r+1}d/dt)(t^{r(n-1)}e^t S_{n-1,r}(t))$ следует из (8), а ее итерирование дает (9). Сравнение левых и правых частей в выражениях (10) с применением (9), тождества

$$(t^{-rn}H_r^n)t^k=k(k+r)\ldots(k+r(n-1))t^k$$

и разложений в степенные ряды функций e^z и $(1-rz)^{-1/r}$ приводит к (10).

Из доказательства теоремы 5 также вытекает, что последовательности $\{S_{n,0,k}\}$ и $\{S_{n,r,k}\}$, $r\ge 1$, порождаемы с порождающими функциями $\varphi_0(z)=e^z-1$ и $\varphi_r(z)=(1-rz)^{-1/r}-1$ соответственно (образующие равны единице).

Порождающие функции $\Phi_0(w)=\ln(1+w)$ и $\Phi_r(w)=r^{-1}(1-(1+w)^{-r})$, $r\ge 1$, обратны к $\varphi_0(z)$ и $\varphi_r(z)$ соответственно. Согласно [4] они порождают последовательность чисел $\{s_{n,r,k}\}$, обратную последовательности $\{S_{n,r,k}\}$. Числа $s_{n,r,k}$ являются обобщением чисел Стирлинга первого рода, так как $s_{n,0,k}=s_{n,k}$, где $s_{n,k}$ – обычные числа Стирлинга первого рода [1].

Многочлен $s_{n,r}(v)=\sum_{k=1}^{n} s_{n,r,k}\,v^k$ связан с характеристическим многочленом [2] посета $\Pi_{n,r}$ формулой

$$v^n s_{n,r}(v^{-1}) = \sum\nolimits_{\pi\in\Pi_{n,r}} \mu(0,\pi)v^{n-\rho(\pi)},$$

т.е. $s_{n,r,n-k}$ – k-е число Уитни первого рода этого посета.

С помощью порождающих функций $\Phi_0(w)$ и $\Phi_r(w)$ несложно найти производящие функции $s_r(v,w) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} s_{n,r}(v)\, n!^{-1} w^n$, $r \ge 0$,

$$s_0(v,w) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Phi_0(w))^k k!^{-1} v^k = (1+w)^v,$$

$$s_r(v,w) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\Phi_r(w)\right)^k k!^{-1} v^k = \exp\left[r^{-1}v\left(1-(1+w)^{-r}\right)\right] \text{ при } r \ge 1. \quad (11)$$

При $r \ge 0$ формулы (11) влекут рекуррентное соотношение

$$s_{0,r,k} = \delta_{0k},\ s_{n,r,k} = s_{n-1,r,k-1} - (n+rk-1)s_{n-1,r,k},\ n \ge 1,\ k \in \mathbf{Z},$$

с помощью которого легко вычисляется

$$\mu_{n-1,r} = s_{n,r,1} = (-1)^{n-1}(r!)^{-1}(n+r-1)! \ –$$

функция Мебиуса посета $\Pi_{n,r}$.

Отметим, что числа $S_{n,r,k}$ были введены Л. Комте для действительного параметра r при рассмотрении действия оператора H_r^n из (9) на функцию $f(t)$ [4], где также доказано соотношение $S_{n,r,k} = \sum\nolimits_{j=k}^{n} (-r)^{n-j} s_{n,j} S_{j,k}$.

Сравнение выражений (10) и (11) для действительного параметра $r \ne 0$ дает соотношение $s_{n,r}(v) = (-r)^n S_{n,r^{-1}}(-r^{-1}v)$, а из первой формулы (11) получаем известное выражение $s_{n,0}(v) = v(v-1)\ldots(v-n+1)$. С помощью теоремы 5 по индукции можно показать, что многочлены $t^{-1}S_{n-1,r}(t)$ и $t^{-1}S_{n,r}(t), (n \ge 2)$ также образуют положительную пару аналогично результату теоремы 2.

4. Обобщенные статистики и обобщенные многочлены Эйлера

В работе [11] исследован ряд статистик на группе перестановок. Расширим действие некоторых из них на множество $GS_{n,r}$. Число подъемов перестановки является одной из простейших ее характеристик. Для перестановки $\sigma \in GS_{n,r}$ число подъемов $\text{rise}(\sigma) = \#\{i : \sigma_i < \sigma_{i+1}, 0 \le i \le rn-1, \sigma_0 = 0\}$, причем статистика $\text{crise}(\sigma) = \#\{i : \sigma_i > \sigma_{i+1}, 1 \le i \le rn, \sigma_{rn+1} = 0\}$, вычисляющая число спусков перестановки $\sigma \in GS_{n,r}$, дополнительна к $\text{rise}(\sigma)$, т.е. $\text{rise}(\sigma) + \text{crise}(\sigma) = n+1$ [8].

Определение 6. Код Лемера $\xi = l(\sigma)$ перестановки $\sigma \in GS_{n,r}$ зададим словом $\xi = \xi_1, \ldots, \xi_{rn}$ с буквами $\xi_1 = 0$, $\xi_i = \#\{j : \sigma_j < \sigma_i, 1 \le j \le i-1\}$, $i = 2, \ldots, rn$, а статистику $\mathrm{imal}(\sigma) = \mathrm{ima}(\xi)$, где $\mathrm{ima}(\xi)$ – число различных букв (integer make) в слове ξ, будем называть по аналогии с [11] обобщенной статистикой Дюмона.

Лемма 3. *Отображение $l : \sigma \mapsto \xi$ биективно.*

Доказательство. По определению 6 перестановке $\sigma \in GS_{n,r}$ соответствует слово ξ с числом вхождений каждого символа, кратным r, причем позиции возрастаний в словах σ и ξ совпадают. В соответствии с определением 6 для восстановления по ξ слова $\sigma \in GS_{n,r}$ будем заполнять пустые (пронумерованные) позиции искомого слова σ по следующему алгоритму.

Если ξ содержит символы, отличные от 0, то на k-м шаге, $k = 1, 2, \ldots$, в слове ξ находится подслово m^r с таким первым символом $m = \xi_i$, что при $m = i - rj - 1$, $j = 0, 1, \ldots$, величина $n - k - j + 1$ максимальна. Затем на r не заполненных ранее позициях слова σ записываются символы $n - k - j + 1$, начиная с i-й позиции. Вычеркивая из ξ найденное подслово m^r, получаем новое слово $\bar{\xi}$ длины $|\bar{\xi}| = |\xi| - r$. Затем полагаем $\xi = \bar{\xi}$ и переходим к шагу $k+1$.

Если ξ содержит все символы, равные 0, то на оставшиеся пустые позиции слова σ записываются неиспользованные ранее символы алфавита $[n]$ кратностью r в порядке убывания их величины.

Итак, по слову ξ сформирована единственная перестановка $\sigma \in GS_{n,r}$.

Определение 7. Числа $A_{n,r,k} = \#\{\sigma : \sigma \in GS_{n,r}, \mathrm{rise}(\sigma) = k\}$, $k \in [n]$, назовем обобщенными числа Эйлера.

При $r = 1$ по определению 7 получаем обычные числа Эйлера $A_{n,k}$.

Теорема 6. а) *Числа $A_{n,r,k}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$A_{0,r,k} = \delta_{0k}, \; A_{n,r,k} = k A_{n-1,r,k} + (r(n-1) - k + 2) A_{n-1,r,k-1}, \; n \ge 1, \; k \in \mathbf{Z}. \quad (12)$$

б) $A_{n,r,k} = \#\{\sigma : \sigma \in GS_{n,r}, \mathrm{imal}(\sigma) = k\}$, $k \in [n]$.

Доказательство. В соответствии с определением 7 и теоремой 6,б rise и imal являются обобщенными эйлеровыми функциями (E-статистиками), определяемыми выражением $A_{n,r,k} = \#\{\sigma : \sigma \in GS_{n,r}, \mathrm{E}(\sigma) = k\}$, $k \in [n]$. Поэтому для доказательства теоремы 6 следует с помощью статистик rise и imal получить формулу (12). При $n = 1$ эта формула проверяется непосредственно. Пусть по индукционному предположению для перестановок $\tau \in GS_{n-1,r}$ и статистик rise, imal числа $A_{n-1,r,k}$ могут быть вычислены с помощью (12). Тогда для доказательства (12) для чисел $A_{n,r,k}$ рассмотрим два случая:

1) Если $A_{n-1,r,k} = \#\{\tau : \tau \in GS_{n-1,r}, \mathrm{E}(\tau) = k\}$, то вставить слово n^r в слова $\{\tau : \tau \in GS_{n-1,r}, \mathrm{rise}(\tau) = k\}$ без изменения числа подъемов $\mathrm{rise}(\tau) = k$

можно ровно k способами, вставляя его в $\tau\in GS_{n-1,r}$ между буквами τ_i,τ_{i+1}, для которых $\tau_i<\tau_{i+1}, 0\le i\le r(n-1)-1$. Аналогично k способами можно вставить слово n^r в слова $\{\tau:\tau\in GS_{n-1,r}, \mathrm{imal}(\tau)=k\}$ без изменения числа $\mathrm{ima}(\xi)=k$, вставляя его в $\tau\in GS_{n-1,r}$ на первом месте или между двумя буквами τ_i,τ_{i+1}, $1\le i\le r(n-1)-1$, для которых в слове $\xi=l(\tau)$ имеем $\xi_j\ne\xi_{i+1}, 1\le j\le i$.

2) Если $A_{n-1,r,k}=\#\{\tau:\tau\in GS_{n-1,r}, \mathrm{E}(\tau)=k-1\}$, то вставить слово n^r в слова $\{\tau:\tau\in GS_{n-1,r}, \mathrm{rise}(\tau)=k-1\}$ с изменением числа подъемов $\mathrm{rise}(\tau)=k-1$ на k можно $r(n-1)-k+2$ способами, вставляя его в $\tau\in GS_{n-1,r}$ на последнем месте или между двумя такими буквами σ_i,σ_{i+1}, что $\tau_i\ge\tau_{i+1}, 0\le i\le r(n-1)-1$. Аналогично, $r(n-1)-k+2$ способами можно вставить слово n^r в слова $\{\tau:\tau\in GS_{n-1,r}, \mathrm{imal}(\tau)=k-1\}$ с изменением числа $\mathrm{ima}(\xi)=k-1$ на k, вставляя его в слово $\tau\in GS_{n-1,r}$ на последнем месте или между двумя буквами $\tau_i,\tau_{i+1}, 1\le i\le r(n-1)-1$, для которых в слове $\xi=l(\tau)$ имеем $\xi_j=\xi_{i+1}, 1\le j\le i$.

Таким образом, если соотношение (12) выполняется для перестановок $\tau\in GS_{n-1,r}$, то оно выполняется и для перестановок $\sigma\in GS_{n,r}$.

С помощью формулы (12) для обобщенных многочленов Эйлера $A_{n,r}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{n,r,k}\,t^k$ проверяется рекуррентное соотношение

$$A_{0,r}(t)=1,\ A_{n,r}(t)=(r(n-1)+1)t\,A_{n-1,r}(t)+t(1-t)A'_{n-1,r}(t),\ n\ge1, \tag{13}$$

которое при $r=1$ определяет обычные многочлены Эйлера $A_n(t)$, а также легко позволяет вычислить $A_{n,r}(1)=\#\{\sigma:\sigma\in GS_{n,r}\}$.

В работе [2] многочлен $Q(t)$ называется f-эйлеровым, если последовательность $\{f(k)\}_0^\infty$ значений многочлена f при $m\ge0$ имеет производящую функцию $\sum_{k=0}^{\infty}f(k)t^k=Q(t)(1-t)^{-m-1}$, $\deg Q\le m$, причем $\deg f\le m$, а $\deg f=m$ тогда и только тогда, когда $Q(1)\ne0$.

Обобщенные многочлены Эйлера $A_{n,r}(t)$ подходят под это определение, так как из (13) имеем

$$A_{n,r}(t)=(1-t)^{rn+1}(t(1-t)^{1-r}d/dt)((1-t)^{-r(n-1)-1}A_{n-1,r}(t))$$

и итерацией, аналогично доказательству теоремы (5), получаем представление

$$A_{n,r}(t)=(1-t)^{rn+1}H_r^n(1-t)^{-1},\ H_r=\frac{t}{(1-t)^{r-1}}\frac{d}{dt}. \tag{14}$$

С помощью (14) несложно получить производящую функцию только при $r=1$, т.е. для обычных многочленов Эйлера $A_n(t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\frac{z^n}{n!} = \frac{1-t}{1-t\,e^{z(1-t)}}.$$

Использование формулы (14) позволяет по индукции показать, что многочлены $t^{-1}A_{n-1,r}(t)$ и $t^{-1}A_{n,r}(t)$ $(n \geq 2)$ также образуют положительную пару аналогично результату теоремы 2.

В заключение отметим, что используемый параметр r может быть продолжен на множество целых или множество действительных чисел, но при этом теряется комбинаторный смысл рассматриваемых двухиндексных последовательностей $V_{n,r,k}$, $U_{n,r,k}$, $S_{n,r,k}$, $A_{n,r,k}$.

Список литературы

1. **Риордан, Дж.** Введение в комбинаторный анализ / Дж. Риордан. – М. : Изд-во иностр. литер., 1963. – 288 с.
2. **Стенли, Р.** Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. – М. : Мир, 1990. – 440 с.
3. **Бондаренко, Л. Н.** Статистики на классах отображений / Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова // Дискретные модели в теории управляющих систем : VIII Междунар. конф. (Москва, 6–9 апреля 2009 г.). – М. : Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. – С. 33–39.
4. **Коганов, Л. М.** Псевдопорождаемые двухиндексные последовательности / Л. М. Коганов. – М. : Недра, 1989. – 86 с.
5. **Гульден, Я.** Перечислительная комбинаторика / Я. Гульден, Д. Джексон. – М. : Наука, 1990. – 504 с.
6. **Gessel, I.** Stirling polynomials / I. Gessel, R. P. Stanly // Journal of combinatorial theory. Series A. – 1978. – V 24. – № 1. – P. 24–33.
7. **Коганов, Л. М.** Универсальная биекция между перестановками Гесселя – Стенли и диаграммами связей соответствующих рангов / Л. М. Коганов // Успехи математических наук. – 1996. – Т. 51. – Вып. 2. – С. 165–166.
8. **Бондаренко, Л. Н.** Два типа r-перестановок и r-многочлены Эйлера / Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова // Дискретная математика и ее приложения : материалы X Междунар. семинара (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). – М. : Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2010. – С. 217–220.
9. **Эндрюс, Г.** Теория разбиений / Г. Эндрюс. – М. : Наука, 1982. – 256 с.
10. **Грэхем, Р.** Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М. : Мир, 1998.
11. **Фоата, Д.** Распределения типа Эйлера и Макмагона на группе перестановок / Д. Фоата // Проблемы комбинаторного анализа : сб. статей. – М. : Мир, 1980. – С. 120–141.

Бондаренко Леонид Николаевич
кандидат технических наук, доцент, кафедра дискретной математики, Пензенский государственный университет

Bondarenko Leonid Nikolaevich
Candidate of engineering sciences, associate professor, sub-department of discrete mathematics, Penza State University

E-mail: dm@pnzgu.ru

Шарапова Марина Леонидовна
ассистент, кафедра общей топологии и геометрии, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Sharapova Marina Leonidovna
Assistant, sub-department of general topology and geometry, Moscow State University named after M. V. Lomonosov

E-mail: dm@pnzgu.ru

УДК 519.1

Бондаренко, Л. Н.

Параметрические комбинаторные задачи и методы их исследования / Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 50–63.